ANALISIS BASICO DE REDES QUE CONTIENEN ARMONICAS

1.1 INTRODUCCION

En sistemas eléctricos de distribución de potencia, tradicionalmente se esperaba que la forma de onda del voltaje suministrado por una empresa distribuidora fuera sinusoidal y sobre esa base, aún ahora, está diseñado y manufacturado la mayoría de elementos del sistema. Así podemos citar equipo de relevación industrial, instrumentación, computación, motores, transformadores, etc., que han sido diseñados para funcionar alimentados por una forma de onda sinusoidal pura.

El crecimiento continuo de los sistemas eléctricos de distribución de potencia y la inclusión dentro de ellos de un mayor número de *elementos no lineales*, como los equipos electrónicos, y muy especialmente los convertidores, siendo éstos los elementos primarios con conexión a la red de distribución de los equipos electrónicos, han contribuido al incremento de la presencia de formas de onda no sinusoidales en el suministro de la energía eléctrica. A lo anterior habría que agregar que las posibilidades de *resonancia* han aumentado.

Las armónicas esencialmente introducen una componente de *pérdidas y mal funcionamiento de equipos*, por lo que su tratamiento dentro del estudio global del sistema, principalmente en lo relacionado al tema de *calidad de la potencia eléctrica o calidad del suministro de la energía eléctrica*, es de alta importancia. Importancia que también se le debe dar dentro del tema de la *eficiencia energética,* especialmente en tiempos como los actuales de lacerantes crisis energéticas en que cualquier acción en contra del desperdicio es obligatoria.

En la actualidad, fluctuaciones lentas o rápidas del voltaje, fluctuaciones lentas o rápidas de la frecuencia, desbalances en los sistemas trifásicos, oscilaciones del neutro, el ruido eléctrico, así como la presencia de la distorsión de voltajes o corrientes en el suministro de la energía constituyen temas de interés dentro del marco de la *calidad de la potencia eléctrica*. La baja calidad en el suministro de la energía eléctrica puede ser determinante en el mal funcionamiento de equipos y dispositivos de control o medición, el exceso de calentamiento en las máquinas, fallas del equipo eléctrico o disminución drástica de su rendimiento. Estos son factores que pueden influir grandemente, no sólo en la eficiencia de los procesos de producción, sino también en la competitividad de una empresa industrial, considerando el alto costo de la energía eléctrica en la actualidad.

Siendo los anteriores, motivos suficientes para que al estudio de la distorsión del voltaje o de la corriente se le ponga la atención que se merece, iniciamos este texto con lo relativo al análisis de redes eléctricas.

1.2 LA SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER

Existe un gran número de formas de onda de voltaje y de corriente, de las cuales se muestran ejemplos en la figura 1-1. En dichos ejemplos, $f(t)$ puede representar un voltaje o una corriente y puede describirse matemáticamente mediante una ecuación simple. Por ejemplo, la ecuación que describe la función de la figura 1-1a es $f(t) = A\, sen\, wt$. Evidentemente ésta es una forma de onda sinusoidal pura, de período T, frecuencia angular w, frecuencia f y ángulo de fase de cero grados.

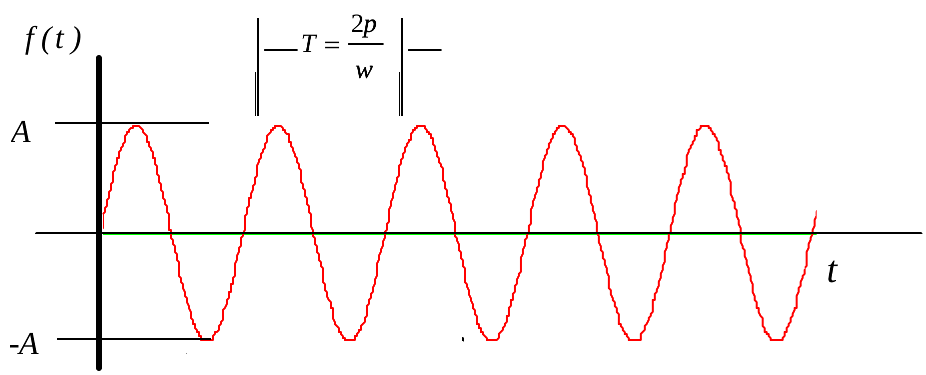


Figura 1-1a
Forma de onda sinusoidal

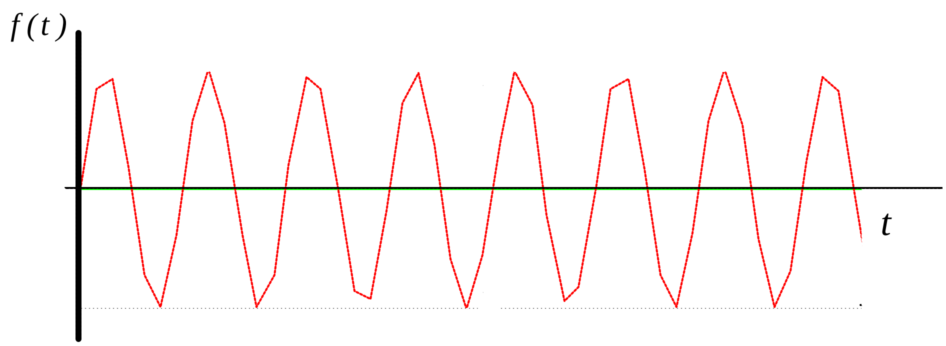


Figura 1-1b
Forma de onda no sinusoidal

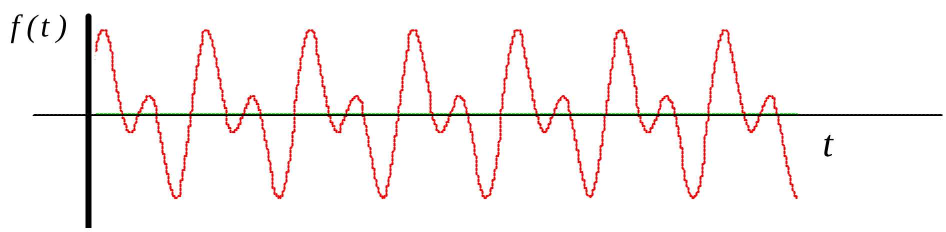


Figura 1-1c
Forma de onda no sinusoidal

Las formas de onda de las demás figuras 1-1b y 1-1c pueden describirse en términos de funciones matemáticas como las trigonométricas, la función rampa o la función escalón, las cuales junto a la red que alimentan pueden modificarse mediante la transformada de Laplace y permitirnos el análisis en el dominio del tiempo. Sin embargo, mediante un análisis como éste, al menos en forma directa, no obtenemos resultados concretos en el dominio de la frecuencia. Es esa la razón principal por la que la serie de Fourier tiene gran importancia, ya que por su medio puede describirse cualquier función periódica no sinusoidal como *una serie de términos sinusoidales de frecuencias armónicamente relacionadas*. De esta manera, se accede al análisis en el dominio de la frecuencia y se facilita la comprensión de los fenómenos físicos que ocurren en aquellas redes eléctricas energizadas con voltajes no sinusoidales o en aquellas en las que se inyectan corrientes no sinusoidales.

El desarrollo de cualquier función periódica no sinusoidal $f(t)$ en serie de Fourier establece que:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + ... + a_h \cos(h\omega t) + ...$$
$$... + b_1 sen\omega t + b_2 sen 2\omega t + ... + b_h sen(h\omega t) \qquad ec\ (1-1)$$

donde

$$a_0, a_1, a_2, ... a_h \ \ y \ \ b_1, b_2, ..., b_h$$

son constantes conocidas como *coeficientes de Fourier*.

$$w = 2pf \qquad ec.(1-2)$$

es la frecuencia angular fundamental, en rad/seg.

f es la *frecuencia fundamental*, en Hz.

t es el tiempo en segundos.

h recibe el nombre de *orden armónico*, h = 1, 2, 3, 4, etc.

Para la aplicación de la ecuación (1-1) se requiere que la función periódica no sinusoidal cumpla con las condiciones de Dirichlet[39]. Estas establecen que, en cada período, la función:

(a) tenga un número finito de discontinuidades,

(b) posea un número finito de máximos y mínimos y

(c) tenga un valor medio finito.

Puesto que las componentes seno y coseno de la misma frecuencia pueden sumarse para generar un término único, la ecuación (1-1) puede escribirse como una suma de sólo términos coseno o de sólo términos seno. Sabemos que:

$$C_h \cos(hwt + q_h) = C_h \cos hwt.\cos q_h + C_h sen\ hwt.sen\ q_h$$

$$ec.(1-3)$$

y

$$C_h \cos(hwt + q_h) = a_h \cos(hwt) + b_h sen(hwt) \qquad ec.(1-4)$$

donde

$$C_h = \sqrt{a_h^2 + b_h^2} \qquad ec.(1-5)$$

y

$$q_h = -tg^{-1}\left(\frac{b_h}{a_h}\right) \qquad ec.(1-6)$$

Por lo tanto,

$$f(t) = a_o + C_1 \cos(wt + q_1) + C_2 \cos(2wt + q_2) + C_3 \cos(3wt + q_3) + \ldots$$
$$\ldots + C_h \cos(hwt + q_h)$$

$$ec.(1-7)$$

En la ecuación 1-7, el primer término, de valor constante, es la *componente de corriente continua o valor medio*, el segundo término, de frecuencia w, corresponde a la *componente fundamental*, el término de frecuencia $2w$ es la *segunda armónica*, el término de frecuencia $3w$ es la *tercera armónica*, etc. El término de frecuencia hw es la *h-ésima armónica*. La *h*-ésima armónica tiene amplitud o valor máximo igual a C_h y ángulo de fase igual a q_h.

Lo básico en el análisis de redes prácticas, por medio de la serie de Fourier, consiste en lo siguiente:

a) Encontrar los coeficientes de Fourier y

b) Decidir *cuántos y cuáles* términos de la serie deben tomarse en cuenta para un problema en particular.

Para encontrar los coeficientes de Fourier se debe, primero, determinar si la función tiene simetría impar, simetría par o simetría de media onda y luego aplicar las fórmulas correspondientes (Ver apéndice A).

Ejemplo 1.1

Encontrar la serie de Fourier de la forma de onda periódica de voltaje mostrada en la figura 1-2, suponiendo que V_p vale 480 V (en cuyo caso el valor eficaz de la forma de onda es de 277.13 V).

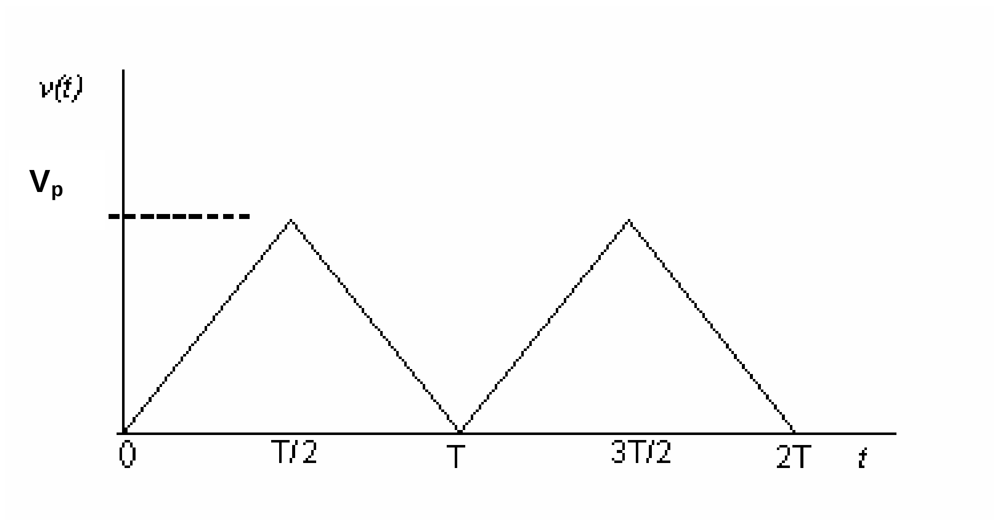


Figura 1-2

Forma de onda del ejemplo 1.1

Solución:

Según lo explicado en el Apéndice A, la forma de onda de $f(t)$ tiene simetría par. Además, carece de valores negativos o menores que cero; por lo que la serie de Fourier contendrá sólo términos coseno y su valor medio será distinto de cero; utilizando las ecuaciones A-7 y A-8 para su cálculo. Debemos integrar de 0 a $\frac{T}{2}$, intervalo en el que la ecuación de la forma de onda triangular corresponde a la de una recta de pendiente $\frac{p}{T/2} = \frac{2\ \ p}{T}$ y se define así:

$$v(t) = \frac{2\ \ p}{T} t \qquad para\ 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

Así, los coeficientes V_o y V_h se determinan como a continuación se muestra:

Coeficiente V_0, o componente de corriente continua:

$$V_o = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2\ x\ 480}{T} t\ \ dt \quad = \quad \frac{480}{2}\ \text{V.}$$

$$V_o = 240\ \ \text{V.}$$

Coeficientes V_h

$$V_h = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2V_p}{T}t \quad cos(\ h\omega t\ )\ dt$$

Integrando por partes, se tiene que

$$V_h = \frac{2V_p}{\pi^2 h^2}(\,cos\ h\pi - 1)$$

de donde,

$V_h = 0$ para h par y

$$V_h = -\frac{4V_p}{\pi^2 h^2} \quad para\ h\ impar$$

De donde, la serie general resultante para la forma de onda dada, es:

$$v(\,t\,) = \frac{V}{2} - \frac{4V_p}{\pi^2}\left[\begin{array}{l} cos(\,\omega t\,) + \frac{1}{9}cos(\,3\omega t\,) + \\ \qquad \frac{1}{25}cos(\,5\omega t\,) + \frac{1}{49}cos(\,7\omega t\,) + \frac{1}{81}cos(\,9\omega t\,)\ldots. \end{array}\right].$$

Y especificando para V = 480 V,

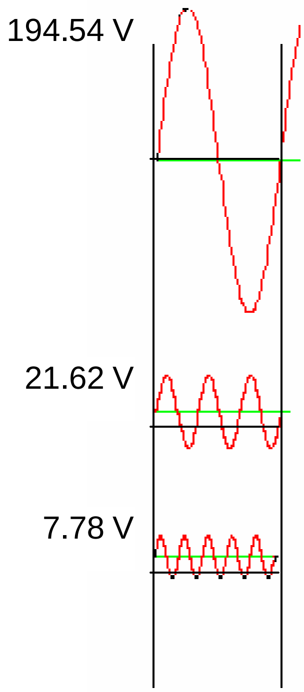
$$V_h = -\frac{194.54}{h^2} \quad para\, h\, impar$$

Por lo que, considerando los 6 primeros términos, la serie de Fourier es la siguiente:

$$v(t) = 240 - 194.54\,cos(\omega t) - 21.62\,cos(3\omega t) - \\ 7.78\,cos(5\omega t) - 3.97\,cos(7\omega t) - 2.40\,cos(9\omega t).....$$

A efecto de observar que conforme aumenta el orden armónico, la amplitud se reduce y la frecuencia aumenta, se muestran las formas de onda correspondientes a la componente fundamental, la tercera armónica y la quinta armónica en la figura 1-3.

Nótese cómo al aumentar el orden armónico se incrementa la frecuencia y la amplitud se reduce.



Componente fundamental. Es una forma de onda sinusoidal cuya frecuencia es $f = \frac{1}{T}$, donde T es el período de la función $v(t)$

Tercera armónica. Es una forma de onda sinusoidal que tiene una frecuencia triple respecto a la fundamental.

Quinta armónica. Es una forma de onda sinusoidal que tiene una frecuencia cinco veces mayor que la frecuencia de la fundamental.

Figura 1-3

Formas de onda que al sumarse dan como resultado la forma de onda triangular de la figura 1-2.

1.3 TIPOS DE ARMONICAS

En general, atendiendo a la causa que las produce, tenemos dos tipos de armónicas: *armónicas características* *o normales y armónicas no características, anormales o no usuales.* El primer tipo se origina debido exclusivamente a la no linealidad de cargas eléctricas o electrónicas, monofásicas o trifásicas, conectados en sistemas trifásicos balanceados y, el segundo, debido a otras causas, como desbalances en el sistema trifásico o regímenes transitorios en la red debido a las máquinas eléctricas, situación en la cual aunque en forma transitoria la forma de onda de la corriente se distorsiona. En este texto se hace referencia solamente a las armónicas características. Además, se definen las *armónicas no fluctuantes o cuasi estacionarias y las armónicas fluctuantes*; estas últimas difieren de las primeras en el sentido de que sus valores cambian en función del tiempo de acuerdo a la variación de la carga o la fuente de alimentación, entendida ésta como la tensión en el punto de acoplamiento común.

Las armónicas, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de tres (h = 3, 6, 9, 12, 15,...), reciben el nombre de *armónicas triples* y las demás se denominan *armónicas no triples.*

Las armónicas, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de dos (h = 0, 2, 4, 6, 8, 10, etc.) reciben el nombre de *armónicas pares*, las demás se denominan *armónicas impares.*

En la serie de Fourier del ejemplo 1-1, cuya forma de onda tiene *simetría par*, sólo hay *armónicas impares,* más el valor medio o componente de corriente continua.

Por otro lado cuando una forma de onda de voltaje contiene componentes armónicas, éstas reciben el nombre de *voltajes armónicos* (o t*ensiones armónicas*) y cuando es la forma de onda de la corriente la que las contiene reciben el nombre de *corrientes armónicas*.

1.4 ESPECTROS DISCRETOS DE AMPLITUD Y DE FASE.

Los *espectros discretos de amplitud (o de fase*) son gráficas mediante las cuales se relacionan la amplitud (o la fase) de los términos de la serie de Fourier con la frecuencia u con el orden armónico correspondiente, C_h vrs. h (o q_h

vrs h). En las figuras 1-4a y 1-4b se muestran los espectros discretos de amplitud y de fase, respectivamente, correspondientes a la serie de Fourier del ejemplo 1.1, la cual para efectos de comodidad se repite a continuación:

$$v(t) = 240 - 194.54\,cos(\omega t) - 21.62\,cos(3\omega t) - \\ 7.78\,cos(5\omega t) - 3.97\,cos(7\omega t) - 2.40\,cos(9\omega t).....$$

Cada barra representa la amplitud de la armónica correspondiente.

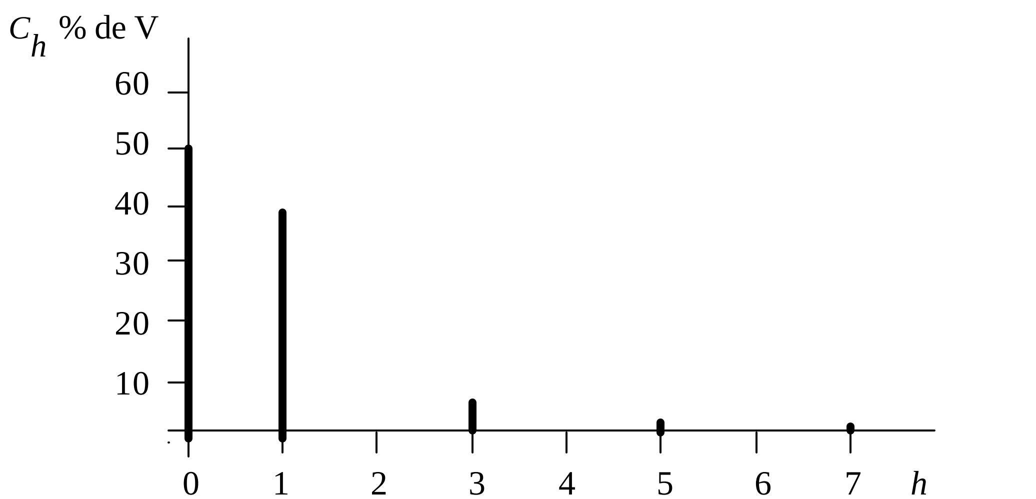


Figura 1-4a
Espectro discreto de amplitud

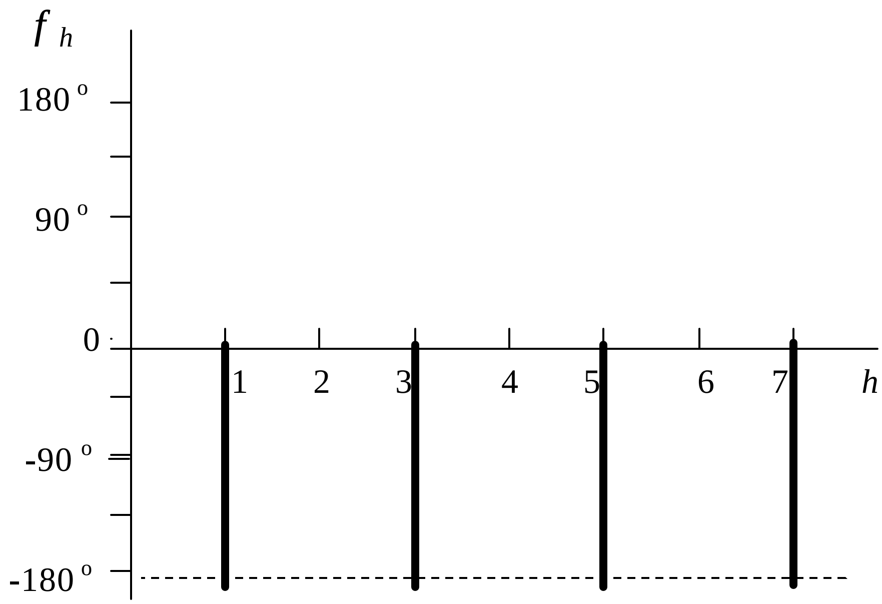


Figura 1-4b
Espectro discreto de fase

1.5 SINTESIS DE FORMAS DE ONDA

La síntesis de formas de onda consiste en la combinación de varias de ellas para producir otra, como resultado de operaciones matemáticas. Para los propósitos del presente texto, la síntesis de formas de onda consiste en la realización de sumas de las formas de onda sinusoidales (o cosenoidales) de la serie de Fourier, para reproducir la forma de onda original lo más aproximadamente posible.

(Haciendo la aclaración de que la reproducción de la onda original es aproximada, puesto que para reproducirla exactamente sería necesaria la síntesis de una serie infinita de formas de onda sinusoidales).

A continuación se realiza la síntesis de formas de onda, tomando en cuenta la serie de Fourier obtenida en el ejemplo 1.1. En la figura 1-5a se muestra sólo el valor medio o componente de corriente continua; en la figura 1-5b, la componente de corriente continua más la componente fundamental; en la figura 1-5c se muestra la tercera armónica, en la figura 1-5d el valor medio más la componente fundamental más la tercera armónica, y en la figura 1-5e se muestra el resultado de sumar a la fundamental, el valor medio y las componentes armónicas comprendidas desde la tercera hasta la novena.

Figura 1-5a
Valor medio o componente de corriente continua

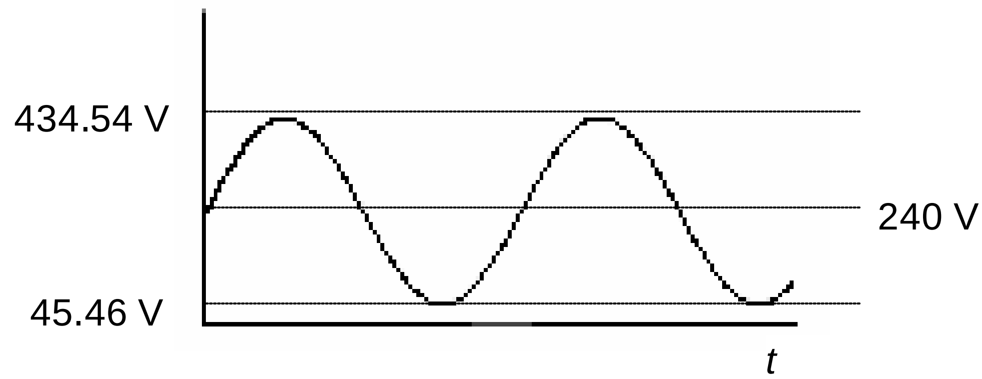


Figura 1-5b
Valor medio más la componente fundamental

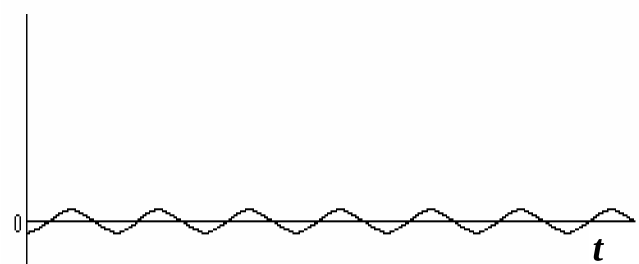


Figura 1-5c
Tercera armónica

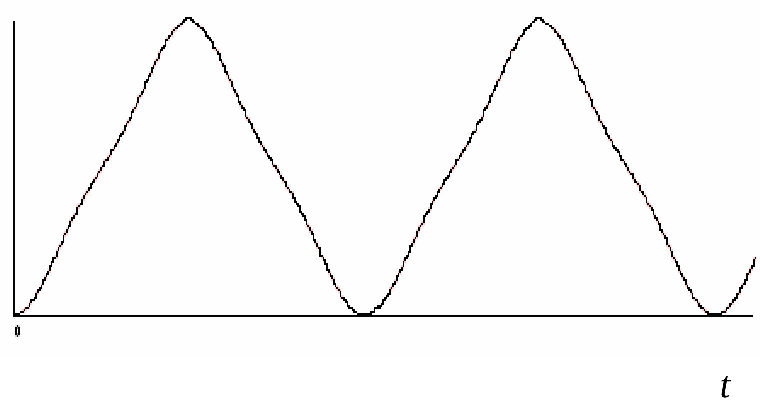


Figura 1-5d
Valor medio + componente fundamental + tercera armónica

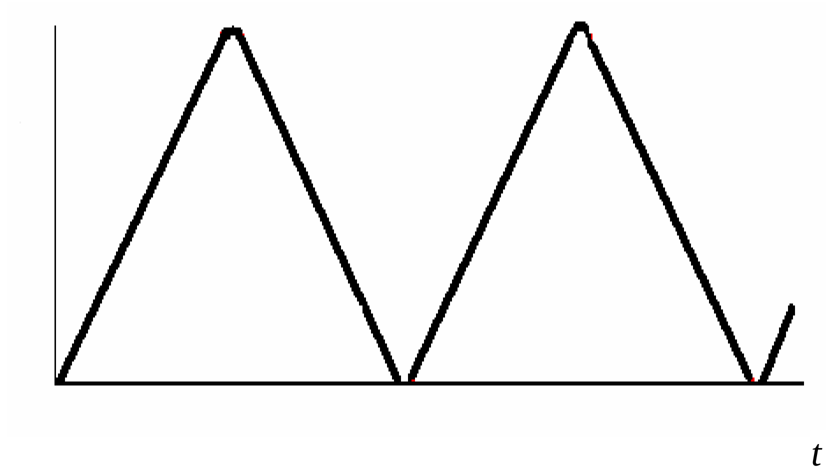


Figura 1-5e
Valor medio más la componente fundamental más las armónicas considerando hasta la novena

Obsérvese que*, a medida que se suman más armónicas a la componente fundamental, la forma de onda resultante se aproxima más a la forma de onda original***.**

En la figura 1-6 se muestran las componentes fundamental y tercera, quinta, séptima y novena armónicas. La amplitud de la componente fundamental es grande si se compara con las amplitudes de las demás armónicas. *A medida que aumenta el orden armónico h la amplitud de* *la* componente armónica *disminuye* y su frecuencia *aumenta*

.

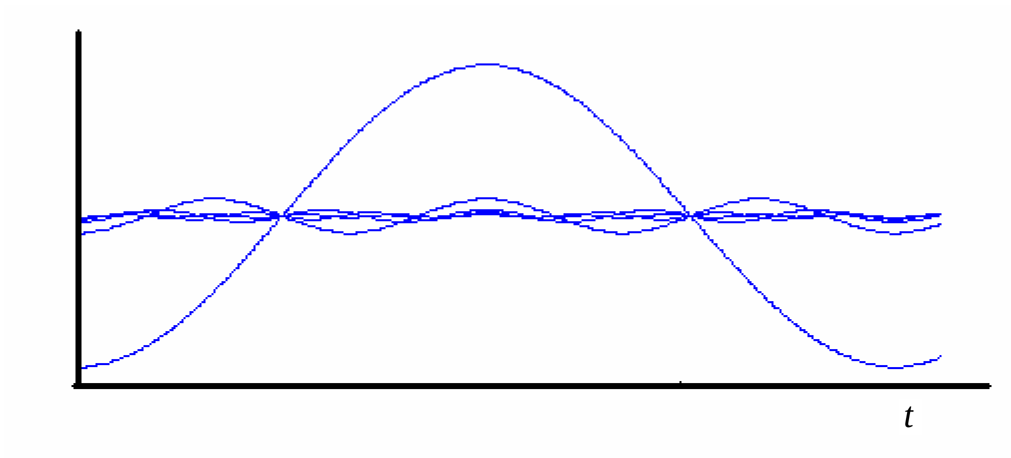


Figura 1-6
Componente fundamental y varias armónicas

En la figura 1-7 se muestran las componentes tercera, quinta y séptima armónicas, pudiendo observarse que la amplitud de la tercera armónica es mayor que la amplitud de cada una de las demás armónicas.

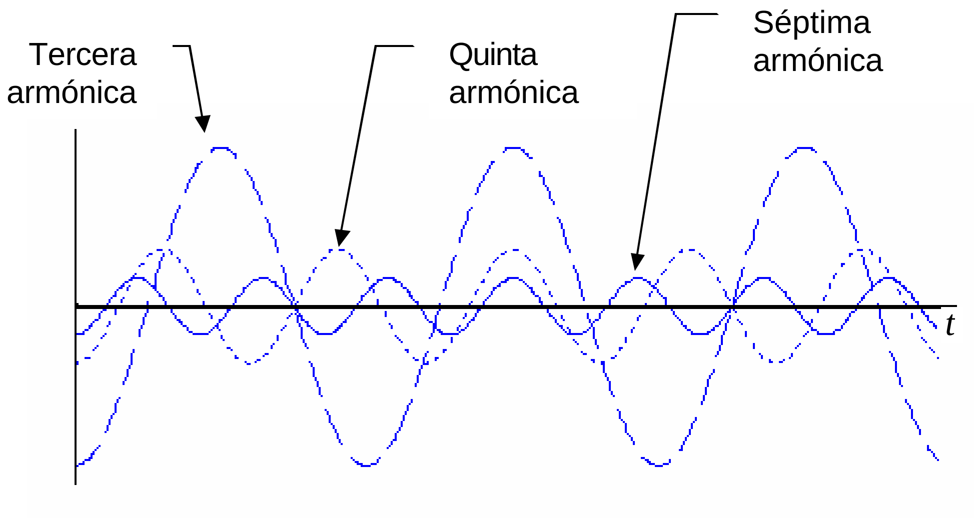


Figura 1-7
Armónicas 3a., 5a. y 7a.